der bekannte Zusammenhang des Imaginärteils der Vorwärtsamplitude mit dem über alle Richtungen integrierten Absolutquadrat („Schattentheorem")

$$\frac{2\pi}{i}\left[\, a(\mathfrak{e},\mathfrak{e},E) - a^{+}(\mathfrak{e},\mathfrak{e},E)\right] = \int a(\mathfrak{e},\mathfrak{e}',E)\; a^{+}(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E)\; \mathrm{d}^2e' = \int a^{+}(\mathfrak{e},\mathfrak{e}',E)\; a(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E)\; \mathrm{d}^2e' \qquad (6)$$

anwenden. Mit der Abkürzung

$$\sigma(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E) = \frac{1}{(2J+1)\,k^2}\,\mathrm{Sp}[a^{+}(\mathfrak{e},\mathfrak{e}',E)\; a(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E)] = \frac{1}{(2J+1)\,k^2}\sum_{M,M'} |\, a_{MM'}(\mathfrak{e}',\mathfrak{e})\,|^2 \qquad (7)$$

wird so aus (5) — f und σ sind jetzt gewöhnliche Funktionen, keine Matrizen mehr —

$$\frac{\partial f(\mathfrak{c})}{\partial t} + \ldots \approx n_1\, c \int [f(\mathfrak{c}') - f(\mathfrak{c})]\; \sigma(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E)\; \mathrm{d}^2e' . \quad (8)$$

Damit hat man die gewohnte BOLTZMANN-Gleichung für das einatomige LORENTZ-Gas. Ist überdies der Streuer kugelsymmetrisch, so gilt

$$\sigma(\mathfrak{e}',\mathfrak{e},E) = \sigma(\mathfrak{e},\mathfrak{e}',E) = \sigma(\chi,E), \quad \text{wo } \cos\chi = \mathfrak{e}\,\mathfrak{e}',$$

und man hat „detailed balance".

Im speziellen Fall $J=\frac{1}{2}$ (Elektronenspin) und bei kugelsymmetrischem Streuer ist die Streumatrix $a(\mathfrak{e},\mathfrak{e})$ in der Vorwärtsrichtung notwendig diagonal. Daher kann man hier im zweiten Glied rechts in (5) f in Strenge ausklammern und sodann das Schattentheorem (6) anwenden *.

Es ist aber bemerkenswert und befriedigend, daß im allgemeinen Fall, wenn man keine „detailed balance" hat, auch die strenge BOLTZMANN-Gleichung (5) eine wesentlich von der gewohnten Form (8) abweichende Gestalt annimmt.

Die geschilderten Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall eines beliebigen, nicht-LORENTZschen Gases übertragen. Damit läßt sich dann das H-Theorem allgemein für Gase mit rotierenden Molekülen beweisen. Darüber soll in einer ausführlichen Publikation in dieser Zeitschrift berichtet werden.

Durch einen längeren Aufenthalt am Heidelberger Institut für theoretische Physik, den ich Herrn Prof. J. H. D. JENSEN verdanke, hatte ich Gelegenheit, mit den dortigen Herren die Probleme dieser Arbeit eingehend zu diskutieren. Insbesondere danke ich Herrn Kollegen H. KOPPE für viele Gespräche und Herrn H. WEIDENMÜLLER für seine Kritik.

* Diese Bemerkung verdanke ich Herrn KOPPE.

Zum Ergodensatz und zum Begriff der makroskopischen Observablen

Von G. LUDWIG

Institut für theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforschg. **12 a**, 662—663 [1957]; eingegangen am 15. Juli 1957)

Wie aus mehreren Beweisen des Ergodensatzes [1] hervorgeht, bleibt der unverständlichste Punkt der des Begriffs der makroskopischen Observablen. Es soll hier kurz über einige Ergebnisse berichtet werden, die auf manche Fragen eine bessere Antwort gestatten. Der Kürze dieser Mitteilung wegen soll nur die Quantenmechanik betrachtet werden. In einem größeren Zusammenhang soll über die einzelnen Beweise berichtet werden.

a) Das ergodische Verhalten eines Systems, das Streben nach einem Gleichgewicht, ist nicht eine Sache des Beobachters, sondern des Systems selbst. Die makroskopischen Observablen sind vom System her bestimmt und nicht durch den Beobachter im Sinne der Informationstheorie.

Es ist weiterhin zu unterscheiden zwischen ergodischen Observablen und makroskopischen Observablen. Der Zeitmittelwert der zeitlichen Schwankungen des Erwartungswertes einer ergodischen Observablen ist vernachlässigbar klein. Durch den in „Der Meßprozeß" [2] dargestellten Beweis (hier ist auf Seite 493, Zeile 10, zu verbessern:

$$Z = \sum_{\omega} |\, g(\omega)\,|^2 = \sum_{\varepsilon,\,\varepsilon'\,(\varepsilon \neq \varepsilon')} |(\varepsilon\,|\,A\,|\,\varepsilon')\,(\varepsilon'\,|\,\psi)\,(\psi\,|\,\varepsilon)|^2 ;$$

der folgende Satz „Das Ungleichheitszeichen ... wollten" ist zu streichen; und $m = \mathrm{Max}$ ist für $\varepsilon \neq \varepsilon'$ zu nehmen) werden nur die ergodischen Observablen ausgezeichnet.

Der Versuch, die makroskopischen Observablen durch die dortigen Betrachtungen von Seite 500 bis 502 auszuzeichnen, ist zu willkürlich. Da nicht alle ergodischen Observablen makroskopisch sein können, weil es nichtvertauschbare ergodische Observablen gibt, müssen die makroskopischen durch einen anderen Gesichtspunkt ausgezeichnet sein, der sich im folgenden ergibt. Dafür, daß es wirklich ergodische und doch nicht makroskopische Observable gibt, sei z. B. nur verwiesen auf die Geschwindigkeit v eines Teilchens in einem Gase, deren Erwartungswert $\bar{v}(t)$ zeitlich einer Konstanten $\bar{v}_0$ zustrebt, während v selber auch im Gleichgewicht zeitlich stark schwankt. Dagegen strebt der Druck p als makroskopische Observable einem konstanten, praktisch nicht mehr zeitlich schwankenden Wert zu.

b) Die Eigenwerte ε_ν des HAMILTON-Operators H des Systems seien diskret und nicht entartet, φ_ν die zugehörigen Eigenvektoren, P_{φ_ν} die zugehörigen Projektionsoperatoren. Das System sei aus N gleichen Teilchen zusammengesetzt, so daß der HILBERT-Raum des Systems gleich $[\mathfrak{R}^N]$ ist, wobei $\mathfrak{R}$ der HILBERT-Raum *eines* Teilchens ist und die eckige Klammer andeuten soll, daß entweder nur der symmetrische oder anti-

[1] J. VON NEUMANN, Z. Phys. **57**, 30 [1929]. — W. PAULI u. M. FIERZ, Z. Phys. **106**, 572 [1937]. — G. LUDWIG, Z. Phys. **135**, 483 [1953]. — M. FIERZ, Helv. Phys. Acta **28**, 705 [1955]. — J. E. FARGUHAR u. P. T. LANDSBERG, Proc. Roy. Soc., Lond. **239**, 134 [1957].

[2] G. LUDWIG, Z. Phys. **135**, 483 [1953].

symmetrische Teil von $\mathfrak{R}^N$ benutzt wird. $\mathfrak{W}_n = [\mathfrak{R}^n]$ sei der Raum für n Teilchen mit $n \ll N$. Die Verkürzung[3] von P_{φ_ν} auf $\mathfrak{W}_n$ sei $W_{\nu n}$. Ein System strebt dann und nur dann einem eindeutigen Gleichgewicht (das allein von der makroskopischen Energie, der inneren Energie, abhängt) zu, wenn $W_{\nu n}$ für $n < n_0$ eine mit ε_ν nur langsam veränderliche, d. h. praktisch stetige Funktion von ε_ν ist. Hierbei bestimmt n_0 die höchstzulässige Teilchenkorrelation innerhalb der ergodischen Observablen. Der Begriff der Teilchenkorrelation wird gleich weiter unten näher erläutert.

c) Ist $W_{\nu n}$ nicht wie unter b) eine sich mit ε_ν nur langsam verändernde Funktion, so ist das Gleichgewicht des Systems mehrdeutig in dem Sinne, daß es weitere *makroskopische* Konstanten der Bewegung als die innere Energie gibt. Diese weiteren Konstanten sind bestimmt durch die verschiedenen $W_{\nu n}$ bei fast gleichen Werten ε_ν.

d) Sind die ε_ν entartet, so muß im allgemeinen der Fall c) vorliegen.

e) Für den Fall des Nichtgleichgewichtes betrachte man die Teilräume $\mathfrak{T}(\varepsilon, \delta\varepsilon)$, die von allen φ_ν mit $\varepsilon < \varepsilon_\nu < \varepsilon + \delta\varepsilon$ aufgespannt werden. $P_{\mathfrak{T}}$ sei der Projektionsoperator auf $\mathfrak{T}$, V sei ein positiv definiter hermitescher Operator mit $P_{\mathfrak{T}} V P_{\mathfrak{T}} = V$. Für alle solche V bilde man die Verkürzungen auf $\mathfrak{W}_n$, die mit V_n bezeichnet seien. Obwohl auch die Fälle c) und d) im Nichtgleichgewicht behandelt werden können, sei der Einfachheit wegen der Fall b) vorausgesetzt. Der Ablauf der Nichtgleichgewichtsvorgänge läßt sich *dann* makroskopisch beschreiben, wenn für $n < n_0$ die V_n bei geeignetem $\delta\varepsilon$ für alle *zulässigen* V miteinander vertauschbar sind. Die makroskopischen Observablen sind allein durch die V_n eindeutig bestimmt. $\delta\varepsilon$ bestimmt in der Form $\delta t\, \delta\varepsilon \geqq \hbar$ ein Zeitintervall δt, in dem sich makroskopische Observablen wenig ändern. Observable, die sich innerhalb eines solchen δt merklich ändern, können nicht makroskopisch sein.

f) Eine Observable A heiße bis zur Teilchenzahl n korreliert, wenn der Erwartungswert

$$\operatorname{Spur}(W A) \approx \operatorname{Spur}(\tilde{W} A)$$

ist, sobald für W und $\tilde{W}$ die Verkürzungen auf $\mathfrak{W}_{n'}$ (mit $n' \geqq n$) übereinstimmen. Ein System soll ergodisch bis zum Grade n heißen, wenn alle bis zur Teilchenzahl n korrelierten Observablen ergodisch sind. Es muß erwartet werden, daß alle normalen makroskopischen Systeme diese Bedingung erfüllen.

g) Alle Betrachtungen lassen sich auf Systeme mit N_1 Teilchen der Sorte 1, N_2 der Sorte 2 usw. übertragen, sobald $N_1 + N_2 + \ldots$ sehr groß ist.

[3] Siehe z. B. S. 128 aus „Grundlagen der Quantenmechanik", Springer, Berlin 1954.

Reibungsdrucktensor, Diffusions- und Wärmestrom in stark inhomogenen Gasen

Von Helmut G. Reik

Institut für Theoretische Physik der Rhein.-Westfäl. Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 663—665 [1957]; eingegangen am 3. Juli 1957)

1. Chapman und Cowling[1] und später Kohler[2] haben gezeigt, daß man die zweite Näherung für den Wärmefluß $\mathfrak{J}_Q^{(2)}$ und den Reibungsdrucktensor $P^{(2)}$ in Einkomponentengasen durch geeignete Mittelbildung über diejenige Enskogsche Integralgleichung erhält, die die Störfunktion zweiter Näherung bestimmt. Dadurch wird die Lösung dieser Integralgleichung umgangen.

Das Verfahren kann auf Zweikomponentengase übertragen werden und liefert neben $P^{(2)}$ und $\mathfrak{J}_{Q\,\mathrm{red}}^{(2)}$ das modifizierte Diffusionsgesetz. Der Zusammenhang zwischen diesen Ausdrücken und der Entropieproduktion zweiter Näherung macht das Verfahren besonders durchsichtig.

2. Mit der Gleichgewichtsverteilung

$$\ln f_j^{(0)} = \frac{m_j}{2\,k\,T}\,(\mathfrak{c}_j - \mathfrak{c}_0)^2 - \ln Z_j$$

erhält man aus der Enskogschen Gleichung zur Bestimmung der Störung *

$$f_j^{(1)} = f_j^{(0)}\,\Phi_j^{(1)}$$

$$\frac{\partial_0 f_j^{(0)}}{\partial t} + \mathfrak{c}_j \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathfrak{r}} + \mathfrak{F}_j \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathfrak{c}_j} = -\,n_j^2 I_j\big(\Phi_j^{(1)}\big) - n_j n_i I_{ji}\big(\Phi_j^{(1)} + \Phi_i^{(1)}\big) \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2 \\ i = 2, 1 \end{pmatrix}$$

die Beziehungen

$$f_j^{(0)}\left[\frac{m_j}{2kT}\,(\mathfrak{c}_j - \mathfrak{c}_0)^2 - \frac{5}{2}\right](\mathfrak{c}_j - \mathfrak{c}_0) \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathfrak{r}} = -\,n_j^2 I_j\big(\Phi_{jQ}^{(1)}\big) - n_j n_i I_{ji}\big(\Phi_{jQ}^{(1)} + \Phi_{iQ}^{(1)}\big), \tag{1}$$

[1] S. Chapman u. T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge 1953. S. 263 ff.

[2] M. Kohler, Z. Phys. **127**, 201 [1949].

* Bezeichnungen nach Chapman und Cowling, l. c. [1], insbesondere bedeutet

$$\mathfrak{d}_{12} = \frac{\partial\,(n_1/n)}{\partial \mathfrak{r}} + \frac{n_1\,n_2(m_2 - m_1)}{n\,\varrho}\,\frac{\partial \ln p}{\partial \mathfrak{r}} - \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{\varrho}\,(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2).$$

$\partial \mathfrak{c}_0 / \partial \mathfrak{r}$ ist der Deformationsgeschwindigkeitstensor, e sein symmetrischer, $\mathring{e}$ sein symmetrischer und spurfreier Anteil. $\{\,,\,\}$ sind die Chapman—Cowlingschen Klammersymbole; vgl. l. c. [1], S. 85, 86.